

# Uma aplicação do modelo sir: *para Covid-19 no Maranhão*

Raimundo dos Santos Marcolino

Doutor em Matemática Aplicada pela Unicamp  
Professor de Matemática do IFMA  
E-mail: raimundo.marcolino@ifma.edu.br

Danilo Lima Falcão

Mestre em Matemática Aplicada e Computacional pela Unicamp  
Professor de Matemática do IFMA  
E-mail: danilo.falcao@ifma.edu.br

Emmanuel Sepúlveda de Oliveira

Mestrando em Ensino de Física pela UFPI  
Professor de Física da IEMA  
E-mail: emmanuel.oliveira@prof.edu.ma.gov.br

Recebido: 02 set 2024

Aprovado: 19 nov 2024

**Resumo:** Este artigo explora o modelo SIR de Kermack-McKendrick (1927) aplicado à Covid-19, delineando sua origem na China até a chegada ao Brasil, com ênfase no cenário no estado do Maranhão (Brasil) pré-vacinação. O estudo propõe a modelagem matemática como estratégia crucial para compreender as dinâmicas epidemiológicas, especialmente essa pandemia no Maranhão entre abril e maio de 2020.

**Palavras-chave:** Modelo SIR. Covid-19. Equações Diferenciais.

**Abstract:** This article explores the Kermack-McKendrick (1927) SIR model applied to Covid-19, outlining its origin in China until its arrival in Brazil, with an emphasis on the pre-vaccination scenario in the state of Maranhão (Brazil). The study proposes mathematical modeling as a crucial strategy for understanding epidemiological dynamics, especially this pandemic in Maranhão between April and May 2020.

**Keywords:** SIR Model. Covid-19. Differential Equations.

**Resumen:** Este artículo explora el modelo SIR de Kermack-McKendrick (1927) aplicado al Covid-19, delineando su origen en China hasta su llegada a Brasil, con énfasis en el escenario de prevacunación en el estado de Maranhão (Brasil). El estudio propone la modelación matemática como una estrategia crucial para comprender la dinámica epidemiológica, especialmente esta pandemia en Maranhão entre abril y mayo de 2020.

**Palabras clave:** Modelo SIR. COVID-19. Ecuaciones Diferenciales.

## Introdução

Este artigo explora o modelo SIR de Kermack-McKendrick (1927) aplicado à Covid-19, delineando desde sua origem na China até sua chegada ao Brasil, com ênfase no cenário no Maranhão pré-vacinação. A Organização Mundial da Saúde (OMS) foi alertada sobre casos de pneumonia em Wuhan em dezembro de 2019, resultando na identificação do novo coronavírus (Mesquita; Meira, 2020). O surgimento do SARS-CoV-2, responsável pela Covid-19, levou a OMS a declarar uma pandemia em março de 2020. No Brasil, o primeiro caso foi registrado em fevereiro de 2020 (Madubueze; Akabuike; Dachollom, 2020).

O presente trabalho destaca os sintomas da Covid-19 e a necessidade de isolamento. No contexto do Maranhão, o *lockdown* foi implementado em maio de 2020 devido ao colapso da saúde. O estudo propõe a modelagem matemática como estratégia crucial para compreender as dinâmicas epidemiológicas, especialmente em casos como a Covid-19. Os objetivos incluem analisar o modelo proposto, integrar dados estaduais e estimar parâmetros para compreender melhor a situação da Covid-19 no Maranhão entre nove de abril a nove de maio de 2020.

### Território de investigação: o estado do Maranhão

O Maranhão, situado na região nordeste do Brasil, destaca-se pela sua vasta extensão territorial, abrangendo uma área de 329.651,496 km<sup>2</sup>. Essa dimensão faz do estado o oitavo maior do país em termos de superfície. Tal extensão territorial contribui para uma diversidade geográfica marcante, incluindo áreas urbanas, vastas extensões de cerrado, florestas tropicais e a presença da maior área contínua de manguezais do mundo, no Delta do Parnaíba (IBGE).

A população do Maranhão, conforme os dados do IBGE, em 2019 é de aproximadamente 7.075.1816 habitantes. Essa cifra reflete a dinâmica demográfica do estado, com sua própria composição étnica, cultural e econômica. Vale ressaltar que, além da quantidade de habitantes, a densidade demográfica mostra-se um fator relevante. Com 20,56 habitantes por quilômetro quadrado, o Maranhão apresenta uma distribuição populacional que pode variar consideravelmente entre áreas urbanas e rurais,

influenciando aspectos como infraestrutura, serviços públicos e padrões de vida (IBGE, 2019).

Um indicador fundamental para avaliar o desenvolvimento humano no Maranhão é o Índice de Desenvolvimento Humano (IDH). Segundo o IBGE, o IDH do estado é registrado em 0,694 em 2019. Esse índice considera diversos aspectos, como saúde, educação e renda, oferecendo uma perspectiva abrangente do nível de qualidade de vida da população. Apesar de ser uma medida positiva, é sempre relevante considerar os desafios e oportunidades existentes para melhorar os indicadores que compõem o IDH (IBGE).

### **O modelo SIR**

A estimativa de infectados da população maranhense, será feita através do modelo SIR, sem dinâmica vital, este é o modelo clássico de Kermack – McKendrick (1927) (Kermack; Mckendrick, 1927; Kretzschmar; Wallinga, 2009), que consiste em uma epidemia em que um indivíduo deve ser isolado, podendo ser curado e tornar-se imune à doença ou morrer. A dinâmica deste modelo considera tanto os indivíduos infectados quanto os que se recuperam da doença. Neste modelo, também são consideradas as mortes pela doença, assim, indivíduos mortos contam como recuperados (Murray, 2002; Soares, 2010).

Nesse modelo, considera-se,

- $S(t)$ : representa as proporções de indivíduos suscetíveis;
- $I(t)$ : representa proporções de indivíduos infectados;
- $R(t)$ : representa proporções de indivíduos recuperados;
- $\beta$ : representa a taxa de transmissão da infecção da doença
- $\alpha$ : representa a taxa de retorno dos infecciosos ao grupo dos suscetíveis

### **Formulação do modelo**

Para este Modelo os compartimentos serão usados para caracterizar as subpopulações de pessoas que contraíram a Covid-19. Portanto, usaremos os compartimentos  $S$  Suscetíveis,  $I$  Infectados e  $R$  Recuperados ou Removidos. Considera-se suscetível todo indivíduo que pode contrair a doença, os infectados são aqueles que

começam a transmitir, sentir ou manifestar a doença, ou seja, considera-se o indivíduo como uma pessoa doente e os recuperados são aqueles que serão contabilizados como recuperados ou mortos.

Os indivíduos Suscetíveis do compartimento  $S$ , ao ter contato com pessoas com o vírus com uma taxa  $\beta$  se contaminam e passam a ser indivíduos Infectados, ou seja, entram no compartimento  $I$ , nesse estágio os indivíduos contraíram a doença e agora são infectantes e tem sintomas. Após um tempo médio  $\frac{1}{\alpha}$ , alguns indivíduos do compartimento dos sintomáticos  $I$ , migram para o compartimento  $R$  dos Recuperados ou Removidos.

É possível representar o modelo compartimental SIR sem dinâmica vital através de um sistema de equações diferenciais não lineares,

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = -\beta SI \\ \frac{dI}{dt} = \beta SI - \alpha I \\ \frac{dR}{dt} = \alpha I \end{cases} \quad (1)$$

com  $S(0) = S_0$ ,  $I(0) = I_0$  e  $R(0) = R_0$ . Sendo que  $\beta$  é a taxa de transmissão e  $\alpha$  a taxa de recuperação dos infecciosos.

A solução analítica para os infectados, suscetíveis e recuperados, considerando  $N \approx S$ , em função do tempo é dado por: (Júnior; Marcolino, 2021).

$$\begin{aligned} I(t) \\ = I_0 e^{(\beta N - \alpha)t} \end{aligned} \quad (2)$$

$$S(t) = S_0 e^{-\beta I t} \quad (3)$$

e

$$\begin{aligned} R(t) \\ = \frac{I_0 \alpha e^{(\beta N - \alpha)t}}{\beta N - \alpha} \end{aligned} \quad (4)$$

## Análise do modelo

Estudaremos no modelo, algumas propriedades ou as particularidades fundamentais da sua dinâmica, como por exemplo os pontos de equilíbrio.

### Determinação dos pontos de equilíbrio

Os pontos de equilíbrio do sistema (1) são encontrados quando anula todas as derivadas do sistema, ou seja,

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = -\beta SI = 0 \\ \frac{dI}{dt} = \beta SI - \alpha I = 0 \\ \frac{dR}{dt} = \alpha I = 0 \end{cases} \quad (5)$$

Percebe-se que no sistema (5) para  $I = 0$ , o sistema tem um número infinito de soluções, ou seja, isso implica que qualquer solução na forma  $(N, 0)$ , representa um ponto de equilíbrio. Por outro lado, não há equilíbrio com o número de infectados diferente de zero. A conclusão que se pode chegar é que, como nesse modelo não foi considerada a dinâmica populacional no hospedeiro, não há possibilidade de a doença atingir nível endêmico. Apesar disso, ainda se pode fazer um estudo nos pontos de estabilidade. Para isto é preciso estender um pouco a mais sobre como ocorre a sua dinâmica (JÚNIOR, 2015).

Os pontos de equilíbrio são  $P_1 = (N, 0)$  e  $P_2 = (0, 0)$ . Logo, biologicamente só há o ponto  $P_1 = (N, 0)$ , pois  $N$  é constante. Sendo o ponto  $P_1 = (N, 0)$  livre da doença, e como citado anteriormente não tem o ponto  $P_3 = (N, I)$  que chamamos de endêmico.

### Análise da estabilidade do ponto de equilíbrio

Sabemos que  $\frac{dS}{dt}$  e  $\frac{dI}{dt}$ , dependem apenas de  $S$  e  $I$ . Portanto para analisar a estabilidade do ponto de equilíbrio encontrado, observa-se os autovalores  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  da matriz Jacobiana.

$$J(S, I) = \begin{bmatrix} F_S(S, I) & F_I(S, I) \\ G_S(S, I) & G_I(S, I) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\beta I & -\beta S \\ \beta I & \beta S - \alpha \end{bmatrix}.$$

Os autovalores  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  da matriz Jacobiana são a solução da equação

$$\lambda^2 - \lambda T + D = 0$$

com  $\Delta = T^2 - 4D$ , sendo  $T$  o traço e  $D$  o determinante da matriz Jacobiana.

Se  $D = 0$ , temos um autovalor zero e o outro autovalor será positivo se

$T > 0$  e negativo se  $T < 0$ . Neste caso, o ponto de equilíbrio é considerado não isolado, isto é, não se pode ter certeza da estabilidade deste ponto.

Analisando o ponto livre da doença  $P_1 = (N, 0)$ , temos,

$$J(N, 0) = \begin{bmatrix} 0 & -\beta N \\ 0 & \beta N - \alpha \end{bmatrix}$$

Com os valores do Determinante e Traço respectivamente,

- $\det(J(N, 0)) = 0$ ,
- $Tr(J(N, 0)) = \beta N - \alpha > 0$ .

Os autovalores correspondentes a matriz jacobiana associada ao sistema (1), calculada usando  $P_1$ , determina a estabilidade local do ponto de equilíbrio livre da doença. Assim, se a parte real das raízes da equação característica  $\det[J(P_1) - \lambda I] = 0$  for negativa, então nesse caso o ponto de equilíbrio é estável (WIGGINS, 2003), ou seja,

$$\lambda^2 - \lambda T + D = 0 \Rightarrow \lambda^2 - (\beta - \alpha)\lambda = 0,$$

é a equação característica e os autovalores são  $\lambda_1 = 0$  e  $\lambda_2 = (\beta - \alpha)$ , se considerarmos  $N = 1$ . Então nesse caso,

- Se  $\beta < \alpha$ , o ponto  $P_1$  é estável,

- Se  $\beta > \alpha$ , o ponto  $P_1$  é instável.

### Número de reprodutividade basal do modelo

O número básico de reprodução da doença é um parâmetro representado por  $R_0$  definido como sendo o número médio de novos infectados gerados por um único infeccioso, quando exposto a uma população em que todos os indivíduos são suscetíveis à doença. Este número básico é muito importante para epidemiologia, pois mede a velocidade inicial da epidemia, ou seja.

1. Se  $R_0 > 1$ , haverá uma epidemia;
2. Se  $R_0 < 1$ , a doença está indo para extinção.
3. Se  $R_0 = 1$ , tem-se uma endemia.

Usando a segunda equação do sistema (1) e fazendo  $\frac{dI}{dt} > 0$ , tem-se  $\beta SI - \alpha I > 0$ , obtemos  $S > \alpha / \beta$ , e se no início *consideramos*  $N \cong S$ , então  $\frac{\beta N}{\alpha} > 1$ , ou seja,  $R_0 = \frac{\beta}{\alpha}$ , se considerarmos  $N = 1$ .

### Uma aplicação da Covid-19 no Maranhão

A tabela 1 apresenta os números de casos novos de Covid-19 no Maranhão no período de 10 de abril de 2020 a 8 de maio de 2020, conforme o Boletim Epidemiológico da Covid-19 da Secretaria de Estado da Saúde do Maranhão (MARANHÃO, 2020), com uma média de aproximadamente 50% de isolamento social nesse período.

Tabela 1 Números de infectados pela epidemia de Covid-19.

Dia	Casos de Covid-19
10/04	51
11/04	54
15/04	65
16/04	102
19/04	115
22/04	153
23/04	194
28/04	276
29/04	386

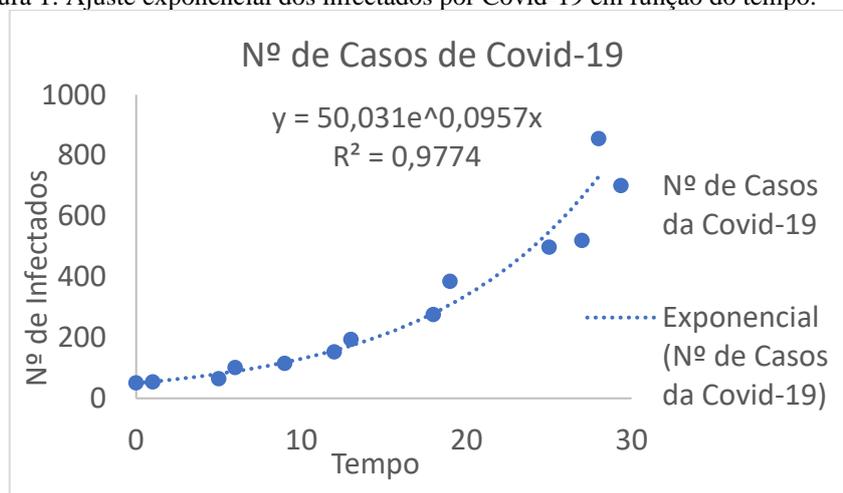
05/05	498
07/05	520
08/05	856

Fonte: Secretaria do Estado de Saúde do Maranhão.

No início de uma pandemia o crescimento dos infectados costuma-se ser exponencial, pois, a quantidade de suscetíveis é muito grande. Vale ressaltar que todas as figuras apresentadas nesse trabalho foram feitas usando o Software Excel. Conforme os dados da Tabela 1 e utilizando como curva de ajuste, para esses dados, uma função exponencial, encontramos:

$$y = 50,031e^{0,0957x} \quad (6)$$

Figura 1: Ajuste exponencial dos infectados por Covid-19 em função do tempo.



Fonte: Autores

Para estimar a expressão  $\beta N - \alpha$  aplicou-se a técnica de análise de um ajuste exponencial com o objetivo de verificar a existência de uma relação entre o número de casos confirmados da Covid-19 na população do Maranhão com o tempo, portanto, com o auxílio do Software Excel, foi possível encontrar a função (6), cuja expressão é da forma  $y = ae^{bx}$ , dos números de casos da doença. Quando se faz um ajuste exponencial não se sabe, a priori, se a curva encontrada é de fato o melhor modelo de ajuste para relacionar duas variáveis; neste caso, número de infectados e o tempo. A verificação da existência e do grau de relação entre essas variáveis é objeto do estudo da correlação. A correlação será tanto mais forte quanto mais próximo  $R^2$  estiver de 1 ou de  $-1$ , portanto conforme a Figura 1, a correlação é considerada boa, pois  $R^2 = 0,9774$ .

Comparando a curva de ajuste  $y$  da Figura 1 com a função  $R + I$  podemos obter o valor da condição inicial  $I_0$ , considerando os valores de  $a = R + I$  e  $\ln e^b = \beta N - \alpha$ , com  $a$  e  $b$  da função (6) (SOARES, 2010), logo  $R + I = 50,031$  e  $\beta N - \alpha = 0,0957$ .

$$I(t) + R(t) = I_0 e^{(\beta N - \alpha)t} + \frac{I_0 \alpha e^{(\beta N - \alpha)t}}{\beta N - \alpha} \quad (7)$$

Como na época que foi escrito esse trabalho, o período de contágio iniciava-se de 1 a 14 dias após o início dos sintomas ou da contaminação, consideramos aqui  $\alpha = \frac{1}{14} = 0,0714290$ , com o objetivo de encontrar o número inicial de infectados do modelo.

Substituindo os valores de  $R + I$  e  $\beta N - \alpha$  na expressão (7), para  $t = 0$

Temos,

$$I(t) + R(t) = I_0 \left(1 + \frac{\alpha}{\beta N - \alpha}\right) \Rightarrow I(t) + R(t) = I_0 \left(1 + \frac{0,0714290}{0,0957}\right) = 50,031$$

$$\Rightarrow I_0 = 28,64832211.$$

Portanto, a condição inicial é  $I_0 = 28,64832211$ .

Dessa forma, a solução do número de infectados em cada instante, dado por  $I(t) + R(t)$  é a expressão

$$I(t) + R(t) = 28,65 e^{0,0957t} \left(1 + \frac{0,0714290}{0,0957}\right) = 50,031 e^{0,0957t}, \quad (8)$$

e esta é a solução final para o modelo.

Isto prova que o modelo realmente funciona em comparação com o ajuste da Figura 1.

## Resultados

Mostraremos o número de infectados e recuperados em comparação com os dados coletados da vida real, usando a solução final do modelo, através de gráficos e tabelas. A Tabela 2 mostra a comparação do número de infectados e o modelo.

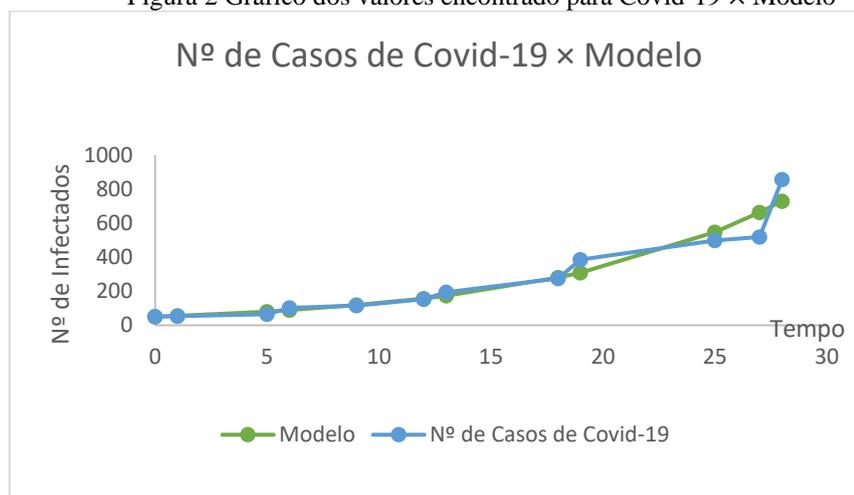
Tabela 2 Infectados × Modelo

Dia	Tempo	Casos da Covid-19	Modelo
10/04	0	51	50,031
11/04	1	54	55,05555759
15/04	5	65	80,7326286
16/04	6	102	88,84051654
19/04	9	115	118,3850933
22/04	12	153	157,7549395
23/04	13	194	173,5980923
28/04	18	276	280,1269276
29/04	19	386	308,2597628
05/05	25	498	547,3797557
07/05	27	520	662,8460846
08/05	28	856	729,4149783

Fonte: Autores

Na Figura 2 é possível observar o comparativo dos números de infectados no Maranhão pela Covid-19 e o modelo, e observa-se que o número de infectados do modelo e os casos reais estão crescendo exponencialmente.

Figura 2 Gráfico dos valores encontrado para Covid-19 × Modelo



Fonte: Autores

Sabemos que a dinâmica do modelo (1) consiste, tanto em analisar os indivíduos infectados, conforme a tabela 1 quanto os que se recuperam da doença. Neste modelo, também são consideradas as mortes pela doença, assim, indivíduos mortos contam como

recuperados. Portanto usando a solução analítica dos recuperados (4) é possível encontrar valores do modelo para os recuperados, que pode ser visto na tabela 3.

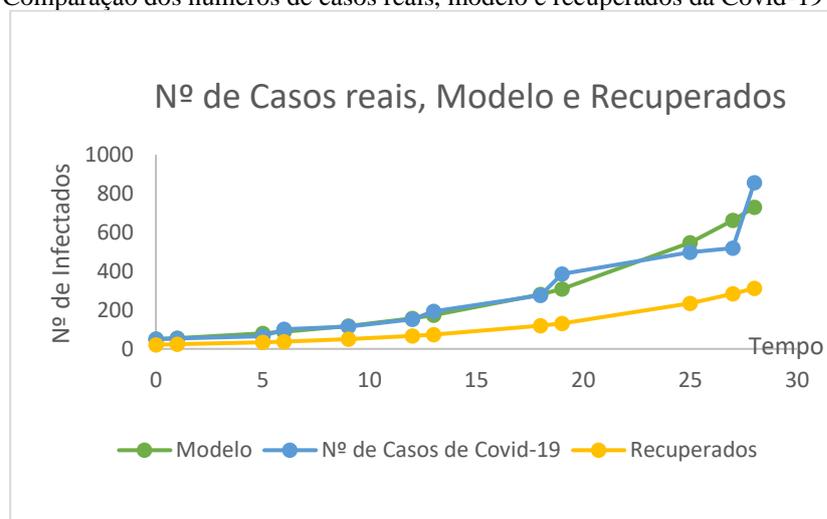
Tabela 3 Infectados × Recuperados

Dia	Tempo	Casos da Covid-19	Recuperados
10/04	0	51	21,38266458
11/04	1	54	23,53011641
15/04	5	65	34,50418176
16/04	6	102	37,96939829
19/04	9	115	50,59640505
22/04	12	153	67,42261712
23/04	13	194	74,19379544
28/04	18	276	119,7229744
29/04	19	386	131,7466193
05/05	25	498	233,9437092
07/05	27	520	283,2926684
08/05	28	856	311,7434355

Fonte: Autores

Na Figura 3, observa-se o comportamento gráfico dos números de casos reais da Covid-19, o número de casos do modelo e o número de casos de recuperados do modelo. Vale ressaltar que o número de óbitos e contabilizados como recuperados. A importância das simulações dos modelos matemáticos epidemiológicos é fazer previsões, através dos estudos de epidemiologia matemática e prever o número de casos futuros para uma determinada doença.

Figura 3 Comparação dos números de casos reais, modelo e recuperados da Covid-19 do modelo

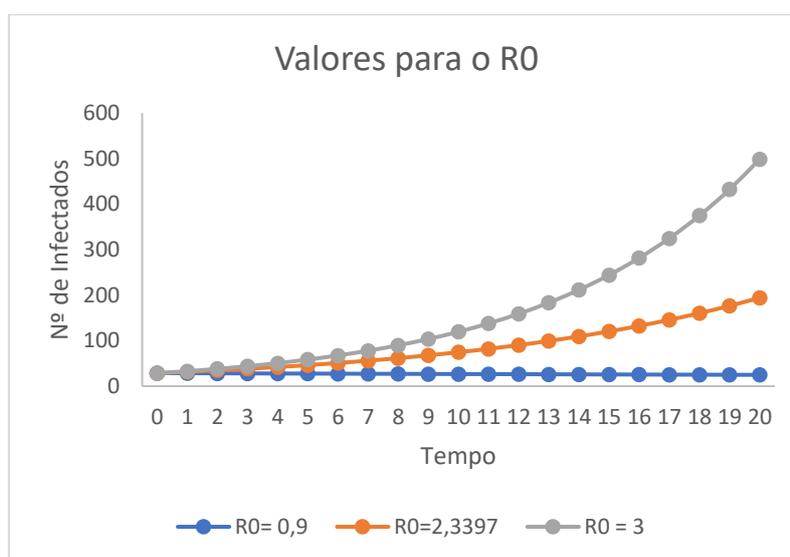


Fonte: Autores

O número básico de reprodução da Covid-19 do modelo SIR sem dinâmica vital é dado por  $R_0 = \frac{\beta N}{\alpha}$ , com  $N \neq 1$ , e calculado usando os dados reais encontrou-se  $R_0 = 2,3397$ , com a taxa de infecciosidade da doença ( $\beta$ ) e taxa de remoção da doença ( $\alpha$ ), o que podemos observar é que temos realmente uma epidemia, pois o  $R_0 > 1$ .

Na Figura 4, verifica-se o comportamento gráfico da variação do modelo SIR com diferentes valores do número básico de reprodução.

Figura 4 Variação do modelo SIR com diferentes valores do número básico de reprodução  $R_0$ .



Fonte: Autores

O comportamento da curva de infecção varia de acordo com o valor que o  $R_0$  assuma. Quando o  $R_0$  é maior que 1, a curva apresenta um crescimento ao longo do tempo, conforme as curvas laranja e cinza, enquanto como se observa na curva azul o  $R_0$  é mais próximo de 1, nesse caso a curva de infecção está com uma tendência a queda no número de casos de Covid-19.

Essas previsões podem ser modificadas conforme outros fatores possam interferir durante o período citado, como por exemplo: fazendo a prevenção do contágio através de: Lavagem das mãos com água e sabão com frequência ou higienização com álcool em gel 70%, ao tossir ou espirrar cobrir o nariz com o braço/cotovelo ou lenço descartável, não compartilhar objeto de uso pessoal, evitar aglomerações e manter os ambientes ventilados e fazendo campanhas de conscientização da população para o isolamento social.

## Conclusão

Neste trabalho, foi apresentado o modelo matemático epidemiológico SIR, de Kermack-McKendrick (1927), utilizando o estudo e a aplicação de sistemas de equações diferenciais não lineares, estrategicamente como busca de solução de problema, com o objetivo de aplicar os casos de Covid-19 no Maranhão, entre os meses de abril e maio de 2020.

Após analisar o referido modelo matemático utilizando os dados dos casos confirmados da doença no Maranhão, foi possível determinar os parâmetros  $\alpha$  e  $\beta$ , obtidos através de uma regressão exponencial e posteriormente encontrar o valor inicial dos infectados.

Em relação ao modelo apresentado, torna-se possível observar que o número de infectados está crescendo, pois isso se deve ao fato de que no modelo o número de reprodução basal  $R_0 > 1$ . O que significa que a doença está aumentando, e nos leva a observar que a abertura do comércio e a flexibilização das regras de distanciamento social podem provocar um crescimento veloz de novas casos de Covid-19. Tal crescimento, por certo, pode ocasionar um contexto indesejável no estado, no país e no mundo.

Observa-se que quando se usa a modelagem e a aproximação numérica para testar hipóteses, para verificar o efeito de medidas de proteção sanitária a uma população ou a setores dessa população, torna-se válida as os exercícios matemáticos de simulações para obter resultados necessários. E, com isso, promove-se o estímulo de campanhas (mais ou menos) intensivas de vacinação, de isolamento, de medidas emergenciais de tipo *lockdown*.

Vale considerar que este modelo matemático – aqui exposto – deve ser caracterizado como um embrião. Ou seja, trata-se do início de um estudo mais profundo e sistemático, com o intuito de ajudar na erradicação desta doença no Brasil e no mundo. Ou seja, os dados aqui apresentados são previsões e simulações que podem vir a não condizer com os casos reais futuros.

## Referências

- IBGE** – INSTITUTO BRASILEIRO DE GEOGRAFIA E ESTATÍSTICA. Disponível: <https://www.ibge.gov.br/cidades-e-estados/ma/>. Acesso em 28 jan 2024
- IBGE**, 2019 – INSTITUTO BRASILEIRO DE GEOGRAFIA E ESTATÍSTICA. Disponível: <https://imesc.ma.gov.br/portal/Post/noticias/705>. Acesso em 28 mai 2020.
- JÚNIOR, F. P; MARCOLINO, R. S; FALÇÃO, L. F; LEITE, J. C. S. **Modelagem Matemática e Epidemiologia com Aplicações**. Curitiba: Appris, 2021.
- JÚNIOR, F. P. Modelagens **Alternativas para a Meningite no Maranhão**. (Dissertação de Mestrado) - Universidade Estadual de Campinas, Unicamp, Campinas, 2015.
- KERMACK, W. O; MCKENDRICK, A. G. A contribution to the mathematical theory of epidemics. In: **THE ROYAL SOCIETY**. Proceedings of the Royal Society of London. mathematical, physical and engineering sciences. 1927. v. 115, n. 772, p. 700-721.
- KRETZSCHMAR, M; WALLINGA, J. Mathematical models in infectious disease, **Journal Article**, Alemanha, 2009. Disponível em: <https://www.ncbi.nlm.nih.gov/pmc/articles/PMC7178885/>. Acesso em: 16 jun. 2022.
- MARANHHAO**, Secretaria de Estado da Saúde do Maranhão. Boletim Epidemiológico COVID-19. Disponível em: <https://www.saude.ma.gov.br/boletins-covid-19/>. Acesso em 08 mai 2024.
- MADUBUEZE, C. E; AKABUIKE, N. M; DACHOLLOM, S. The role of mathematical model in curbing covid-19 in nigeria. **medRxiv**, Cold Spring Harbor Laboratory Press, 2020.
- MESQUITA, É. G. C; MEIRA, J. L; DIAS NETO, J. R. L. APLICAÇÃO DO MODELO SIR À COVID-19: distanciamento social e (des)evolução da pandemia no Tocantins. **Revista Observatório**. Tocantins, n. 3, 2020.
- MURRAY, J. D. **Mathematical biology**: I. An introduction. Third Edition. Washington: Springer, 2002.
- SOARES, A. L. O. **Modelagem alternativa para sistemas epidemiológicos**. Dissertação (Dissertação de Mestrado) — Universidade Federal do ABC, Santo André, 2010.
- WIGGINS, S. **Introduction to applied nonlinear dynamical systems and chaos**. Second Edition. Bristol: Springer, 2003.